

## Per una didattica di riforma

Questa collana, dedicata soprattutto a chi opera nella scuola nella prospettiva di riforma, si inserisce in un momento cruciale della lotta per il rinnovamento della cultura e delle istituzioni educative. Il suo scopo è quello di accogliere la richiesta di alta divulgazione che proviene dal mondo della scuola: che non significa in nessun modo semplificazione e appiattimento ma al contrario invito alla chiarezza, capacità di rendere le discussioni scientifiche momenti di battaglia democratica, nella consapevolezza che la ricerca progredisce proprio quando i suoi risultati vengono prontamente percepiti, raccolti, divulgati, quando diventano oggetto di discussioni ampie e non improvvisate.

In questa prospettiva, la proposta di un'ottica interdisciplinare viene a significare non una convergenza imposta a priori, un invito a confondere o a ridurre lo specifico di ogni approccio scientifico, ma piuttosto ricerca rigorosa e insieme aperta e problematica sui temi che impegnano la società contemporanea e che proprio per la loro complessità, si pongono immediatamente come multidisciplinari, tali cioè che non possono essere trattati unicamente nei termini della tradizionale ripartizione delle competenze.

76-0209-X

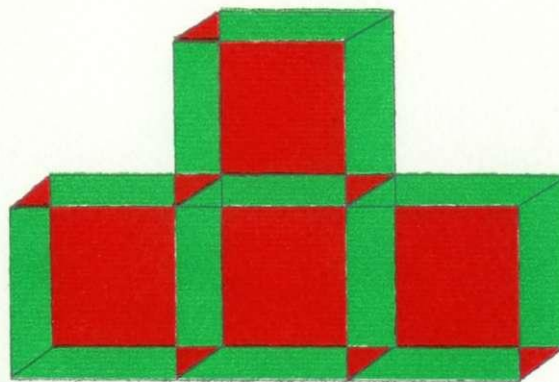
4

Per una didattica di riforma

GUARALDI

Ettore Casari  
Giorgio Israel  
Federico Marchetti

# I FONDAMENTI DELLA MATEMATICA DALL'800 AD OGGI



Per una didattica di riforma - 4  
GUARALDI

Per una didattica di riforma

4

Ettore Casari  
Federico Marchetti  
Giorgio Israel

PER UNA DIDATTICA DI RIFORMA

Comitato di redazione: Valentino Baldacci, Scipione Guaracino, Alessandro Savorelli, Gigliola Sbordonì, Giampaolo Taurini, Mario Vezzani.

I FONDAMENTI  
DELLA MATEMATICA  
DALL'800 AD OGGI

Guaraldi Editore

ETTORE CASARI Il problema dei fondamenti della matematica dall'800 ad oggi	7
FEDERICO MARCHETTI La scienza da strumento di conoscenza a strumento di progettazione: la matematica dai primi dell'800 al '900	29
GIORGIO ISRAEL La matematica assiomatica ed il « bourbakismo »	49

ETTORE CASARI

Il problema dei fondamenti  
della matematica dall'800 ad oggi

## GLI AUTORI

Ettore Casari è ordinario di Filosofia della scienza presso l'Università di Firenze. Fra le sue pubblicazioni ricordiamo: *Logica dei predicati* (Torino 1957); *Computabilità e ricorsività* (Milano 1959); *Lineamenti di logica matematica* (Milano 1959, 1977); *Questioni di filosofia della matematica* (Milano 1964, 1977); *Filosofia della matematica del '900* (Firenze 1973); *Formazione scientifica e scuola di massa in Scuola e scienze* (Bari 1975). Numerosi articoli e saggi sono inoltre apparsi su «Il pensiero», «Rivista di Filosofia», «Synthèse», «Bollettino dell'unione matematica italiana».

Giorgio Israel insegna Matematica complementare all'Università di Roma. Ha pubblicato fra l'altro, in collaborazione con M. Girardi, *Teoria dei campi* (Milano 1976); in collaborazione con L. Lombardo Radice *Alcune recenti linee della matematica contemporanea* in M. Daumas, *Storia della scienza*, vol. II, *Le scienze matematiche e l'astronomia* (Roma-Bari 1976); *Un aspetto ideologico della matematica contemporanea: il «bourbakismo»* in *Matematica e fisica: struttura e ideologia* (Bari 1977). Ha pubblicato inoltre vari articoli e saggi di storia della scienza e di carattere matematico negli «Atti dell'Accademia nazionale dei Lincei», in «Scientia» e su altre riviste.

Federico Marchetti insegna Analisi matematica presso l'Università di Roma. Ha pubblicato fra l'altro, in collaborazione con C. Boldrighini *Lo sviluppo della matematica alla fine del secolo XIX: il problema dei fondamenti e la formalizzazione hilbertiana in Scienza, struttura, società* (Bari 1977); *La nascita della geometria non euclidea e L'affermarsi del metodo assiomatico nella matematica moderna* in «Sapere», oltre a vari saggi sempre su «Sapere» e altre riviste scientifiche.

Dalla fine del secolo scorso si è andato delineando, nel campo della matematica, un contrasto, su cui ancora si discute, che è assai utile ripercorrere per introdurre il problema dei fondamenti di quella scienza. Per illustrare questo tipo di contrasto è necessario prendere le mosse proprio da quanto si verifica nel corso dell'800. Nel corso di quel secolo vengono lentamente maturando nel mondo matematico due modi di pensare che non sono soltanto due modi di pensare *intorno* alla matematica, ma anche, per non dire soprattutto, due modi di pensare *in* matematica. Il primo di questi modi potrebbe appropriatamente venire chiamato *riduzionismo insiemistico*. Con una serie di precisazioni che faremo in seguito, si può dire che questo riduzionismo insiemistico si viene svolgendo e realizzando attraverso tre tappe fondamentali.

La prima tappa è costituita dalla riorganizzazione, per così dire, dalla analisi, o meglio

dalla precisazione, in termini sostanzialmente insiemistici, del patrimonio concettuale della analisi reale e complessa. Il nome essenziale di questa prima fase, quello al quale questo discorso, quando lo si voglia schematizzare al massimo, risulta riconducibile è quello del francese Cauchy. La fase successiva ha un nome storiograficamente affermato: si tratta della cosiddetta aritmetizzazione dell'analisi. Questa aritmetizzazione dell'analisi consiste precipuamente nell'analisi, in termini insiemistici, del concetto di numero reale o, più correttamente, nella riconduzione, attraverso analisi di tipo insiemistico, del concetto di numero reale a quello di numero naturale. Il culmine di questa fase si ha intorno al 1872, attraverso la fondazione cantoriana da un lato e dedekindiana dall'altro, del sistema dei numeri reali. La terza fase è per certi aspetti la prosecuzione diretta della aritmetizzazione dell'analisi, ed è costituita dalla cosiddetta logicizzazione dell'aritmetica. Mentre l'aritmetizzazione dell'analisi era riuscita a riportare il concetto di numero reale (e in generale di tutto quanto veniva costituito sopra i numeri reali) al concetto di numero naturale attraverso l'impiego di puri concetti insiemistici, la logicizzazione dell'aritmetica realizza l'ulteriore passo avanti e cioè la eliminazione di quel residuo non logico, non insiemistico che era costituito dall'insieme dei numeri naturali dando una fondazione, o se si vuole, una analisi in termini puramente logico-insiemistici del concetto stesso di numero naturale. Il protagonista di questo sviluppo è Gottlob Frege e le sue idee, a parte un certo incidente al quale si accennerà succes-

sivamente (la scoperta delle antinomie), sono la base di quanto nel nostro secolo verrà sviluppato, formato, sistemato e riorganizzato da Bertrand Russell.

Accanto a questo momento, al momento cioè della fondazione puramente insiemistica del concetto di numero naturale, si verifica un altro fenomeno ossia la fondazione della teoria concreta dei numeri transfiniti ad opera di Cantor. Non possiamo naturalmente soffermarci ad analizzare e discutere tutta una serie di problemi storici e teoretici che si pongono in questo contesto. Ciò che interessa mettere in luce sono alcuni tratti essenziali di questa tendenza riduzionista.

Il primo di questi tratti è il seguente: questa riduzione fu sempre concepita in ogni sua fase, come una analisi di ciò che era più complesso in termini di ciò che era più semplice, mediante l'uso di strumenti genericamente insiemistici o logici. Secondo tratto: in ogni fase, o meglio, in ognuna delle fasi alle quali si è accennato ed anche in altre che si potrebbero individuare qualora si approfondisse meglio il discorso, in ognuna di queste fasi, dunque, il lavoro riduttivo venne concepito in maniera determinata. Con questo intendo dire che gli enti sui quali si arrivava attraverso il processo di riduzione, erano sempre concepiti come qualcosa che avrebbe eventualmente anche potuto subire per parte sua ulteriore analisi (quindi necessariamente non come qualcosa di definitivo, dal punto di vista della possibile analisi), ma comunque sempre come qualcosa di concreto, qualche cosa di determinato in sé. Se a un certo punto si arrivava

a poggiare sui numeri reali (o, successivamente, sui numeri naturali, o successivamente ancora sulle classi, sugli insiemi o su cose di questo genere) questi enti erano concepiti di volta in volta come qualcosa di determinato, come oggetti in qualche modo autonomi, sensatamente presupponibili. Non erano affatto, in altre parole, il risultato eventuale di un mero atto postulazionale, ossia non erano eventuali possibili soluzioni di un sistema di condizioni che fossero state imposte. Il terzo tratto importante è che avendo l'esperienza insegnato a diffidare della intuizione, il rigore era d'obbligo e la necessità di definizioni esatte e dimostrazioni rigorose era fortemente sentita.

Dedekind, ad esempio, diceva che «ciò che può essere dimostrato non può essere creduto nella scienza senza dimostrazione». Questa esigenza di rigore, di sistemazione, che nasceva da una esperienza negativa fatta nei confronti della intuizione, non si è però mai - in questi autori - posta come problema di eliminazione di un significato, eventualmente anche un significato intuitivo, dalle proposizioni della matematica.

Essa si poneva come problema di eliminazione della intuizione dal processo di svolgimento della costruzione matematica, ma mai come problema di una esclusione di significati. Queste, molto schematicamente, le caratteristiche di quel punto di vista che abbiamo chiamato riduzionista e che viene via via emergendo nella matematica dell'Ottocento, anzi, per essere più precisi, che viene emergendo nel mondo degli analisti dell'Ottocento.

Di contro ad esso, c'è un altro fenomeno, com-

pletamente diverso, legato piuttosto al mondo dei geometri e degli algebristi. Si tratta del graduale emergere di un punto di vista che - considerato nei suoi esiti - si potrebbe chiamare della rivoluzione assiomatica. Ciò che qui si verifica, è una trasformazione profonda della concezione sia della organizzazione che della funzione del metodo assiomatico. Cerchiamo di vedere rapidamente quale era l'idea costitutiva del metodo assiomatico, così come essa si era formata nel mondo greco e come, con tutte le cautele del caso, si era conservata inalterata fino all'inizio dell'Ottocento. Si può dire che tale concezione era fondamentalmente così sintetizzabile: posti di fronte ad un certo ambito di esperienza, noi introduciamo dei concetti che categorizzano questa esperienza e formuliamo delle proposizioni che dicono come questi diversi concetti si collegano tra di loro nel caso di questa esperienza. Il problema fondamentale per quanto riguarda i concetti - almeno a livello delle esperienze di tipo matematico - è quello della intelligibilità di questi concetti, mentre per quanto riguarda le proposizioni il problema fondamentale è quello della verità di queste proposizioni. L'organizzazione assiomatica della teoria di questo ambito di esperienze veniva concepita essenzialmente in questo modo: si trattava di vedere se non fosse possibile rinvenire un numero sufficientemente piccolo, possibilmente piccolissimo, di concetti, la cui intelligibilità fosse immediata, e un certo numero di proposizioni, anch'esso possibilmente piccolo, la cui verità fosse di nuovo immediata ed evidente e utilizzare quindi lo strumento logico della definizione per trasmettere a tutti gli

altri concetti in ballo l'intelligibilità e lo strumento logico della dimostrazione per trasmettere a tutte le altre proposizioni in ballo la verità. Questa, grosso modo, la funzione che veniva assegnata all'organizzazione assiomatica nel sapere. In essa, si noti, agiva una serie di componenti: c'era la componente puramente logica della definizione, ossia dell'operazione del definire, che aveva il compito di trasmettere intelligibilità, c'era poi l'altra funzione, altrettanto logica, del dimostrare, che aveva il compito di trasmettere la verità; queste trasmettevano una intelligibilità, rispettivamente una verità, che partiva però dagli elementi primi; a questi l'intelligibilità e la verità erano invece assicurate dal momento extralogico dell'evidenza immediata o meglio, dalla intuizioni. Naturalmente vi sono state sempre varietà di interpretazione e disparità di vedute, ma grosso modo, l'idea base era quella che abbiamo esposta. È però importante rendersi conto, che se questo era il modo nel quale veniva poi dogmaticamente, ossia in sede espositiva, presentata l'organizzazione della teoria, in sede euristica, le cose andavano diversamente. Gli *assiomi*, cioè le proposizioni primitive, e i *concetti primitivi*, non erano il punto di partenza, ma il punto di arrivo. Erano il punto di arrivo della riconduzione del problema della intelligibilità di un concetto complesso a quello della intelligibilità di concetti più semplici e altrettanto si può dire per quanto riguarda il rapporto dimostrativo tra verità complesse e assiomi. Si può dire quindi che, pur avendo gli assiomi e i concetti primitivi priorità logica, essi non avevano priorità epistemologica. Erano ciò che restava, il ri-

sultato, quando ci si spingeva sempre più giù, all'indietro. Il processo di riconduzione a un certo punto si arrestava; quello che avanzava, ciò su cui ci si fermava, erano gli assiomi e i concetti primitivi.

Nel corso dell'Ottocento si verificano all'interno della matematica, alcuni fenomeni che mutano profondamente questo tipo di impostazione. Intanto, la crisi dell'euclideismo geometrico, cioè il riconoscimento della possibilità della costruzione di teorie geometriche diverse da quelle alle quali si era abituati, mette in discussione proprio il valore che si possa attribuire alla intuizione responsabile in ultima istanza della fondazione generale.

È vero che c'era la logica, ma essa si limitava a trasmettere la verità o l'intelligibilità, non le creava. Chi le garantiva alla base, e per quanto riguardava i momenti primitivi, era soltanto la intuizione. Questo modo di vedere entra profondamente in crisi.

Qui bisogna che ci fermiamo, perché altrimenti saremmo sempre fermi su questo punto; ma per cogliere a fondo il senso della rivoluzione assiomatica sarebbe da vedere quanto si verifica nel quadro dello sviluppo della geometria proiettiva, e poi soprattutto quanto si verifica nell'algebra astratta, dove viene messa definitivamente in crisi addirittura l'ipotesi stessa che ci sia qualcosa che attraverso le definizioni e le dimostrazioni viene trasmesso e dove l'assegnazione agli elementi primitivi di una funzione anche epistemologicamente prioritaria diventa la base stessa di gran parte degli sviluppi teorici.

Se il punto di arrivo del primo filone, quello che

abbiamo chiamato del riduzionismo insiemistico, all'inizio del nostro secolo, è il logismo di Bertrand Russell, il punto di arrivo di questo altro filone sono i fondamenti della geometria di David Hilbert e i fondamenti dell'aritmetica di Giuseppe Peano. A questo punto è importante sottolineare che nel corso dell'Ottocento, queste due vie, questi due modi di pensare, in e intorno alla matematica, non si svolgono in contrapposizione l'uno all'altro; spesso si ha l'impressione (anche se si potrebbero ritrovare delle eccezioni) che in generale non esista una chiara percezione di certe incompatibilità che possono esistere tra le due strade. Soprattutto non ci si rende ben conto, se non verso la fine del secolo, in Frege, ma soprattutto in Russell da un lato, e in Peano e Hilbert dall'altro, che ognuna delle due vie è, per conto suo, capace di aspirare a fondare l'intera matematica. È alla svolta del secolo che ognuna delle due comincia a pretendere di essere *la* strada, *la* maniera di fare matematica.

Si assiste ora, anche in connessione con la cosiddetta crisi dei fondamenti aperta dalla scoperta delle antinomie, al fatto che dopo un certo iniziale riaffermarsi del punto di vista riduzionistico, quello che assai più si diffonde e non soltanto nell'ambito piuttosto ristretto degli studiosi di problemi di fondamenti della matematica, ma proprio nell'ambito generale dei matematici, è piuttosto il secondo atteggiamento, quello assiomatico-formalistico.

Orbene, il problema centrale che io vorrei discutere è il seguente. È proprio vero che questa seconda strada ha soppiantato completamente la prima o non è invece che quest'ultima è capace

di recuperare ad un livello di maggiore consapevolezza anche la seconda? Questo è un po' il punto centrale. È interessante notare che, per esempio, Russell a un certo punto di una sua discussione critica della impostazione di Peano, annota di passaggio «che anche il modo di Peano non è fallace, e invero per certi scopi può rappresentare una utile generalizzazione». Ora quello che Russell sembrava non vedere è che se questo è veramente una utile generalizzazione, un modo non fallace di fare altra matematica, allora, chi, come Russell si collochi in un'ottica diversa, ed aspiri a dare fondazione onnicomprensiva della matematica, è tenuto a render conto di questo metodo, e a trovare dunque anche una spiegazione di questo metodo che si lasci inquadrare nella sua ottica e nella sua prospettiva.

Per quanto concerne questo tipo di problema, e cioè il possibile assorbimento della prospettiva assiomatica nel quadro generale della insiemistica, una prima indicazione si ritrova in una discussione che si svolge ad un certo punto tra Hilbert e Frege. In questa discussione, emerge per la prima volta l'idea che in realtà una costruzione assiomatica di una teoria può venire concepita come una definizione all'interno della teoria degli insiemi. Quando, cioè, si dà assiomaticamente un certo sistema matematico, ossia quando si «scrivono giù», per così dire, delle condizioni, e si pensa alle possibili realizzazioni di queste condizioni, si starebbe in realtà facendo una definizione di questo genere: un sistema di enti che soddisfa quelle certe dimensioni, è, per definizione, una certa cosa. Facciamo un esempio, prendendo una struttura molto semplice co-

me è la struttura di semigruppò. Dal punto di vista insiemistico, l'introduzione del concetto di semigruppò può essere concepito come una definizione in questi termini: un semigruppò è, per definizione, un insieme sul quale sia definita una operazione binaria che è associativa. Così facendo abbiamo trasformato la presentazione del concetto di semigruppò che usualmente viene fornita attraverso degli assiomi, in una definizione insiemistica.

Questo, in prima, molto rozza approssimazione, perché se poi si va a vedere un po' meglio la questione, ci si accorge che in realtà le vie che si presentano per la costruzione assiomatica dei concetti astratti sono due. L'una è una via che prescinde completamente dalla considerazione di un linguaggio; l'altra è invece una via che del linguaggio tiene conto. Questa contrapposizione la si può, forse, precisare terminologicamente, parlando di costituzione *materiale*, rispettivamente *formale* di un concetto *astratto*. Non posso naturalmente entrare in dettagli, tuttavia vorrei accennare ad una circostanza storica che mi pare estremamente illuminante. Verso la fine dell'Ottocento, dunque, vi sono vari studiosi i quali presentano delle fondazioni per il concetto di numero naturale. Abbiamo da un lato quella di Frege. Senza entrare in particolari, quello che conta sottolineare è questo: Frege identifica i numeri naturali con certi particolari ben definiti insiemi. Dà cioè una definizione, un concetto diretto, *concreto* di numero naturale (e dunque anche di sistema di numeri naturali), nel senso che dice che, per esempio, il numero naturale cinque è quel tale insieme lì e non altro. Dall'altro lato

abbiamo da una parte Dedekind e dall'altra Peano, i quali forniscono invece una definizione assiomatica, ossia danno una definizione astratta. Essi non dicono che cosa sono *i* numeri naturali, dicono che cosa è *un* sistema di numeri naturali. Per loro il problema di che cosa siano *i* numeri naturali è problema che è insensato; per loro ha senso solo il problema: che cosa è *un* sistema di numeri naturali? Ed ecco qui che abbiamo due definizioni.

Spesso si è discusso se e in che modo le due definizioni non siano poi in fondo una ed una sola. Di solito - quando si cerca di caratterizzare questa differenza - si rileva una maggiore presenza di elementi simbolici nel caso di Peano (il quale disponeva di un apparato logico che invece Dedekind non conosceva o quanto meno non voleva adoperare) e con questo ci si mette il cuore in pace.

In realtà le cose sono diverse. La verità è che Dedekind sta dando quella che qui stiamo chiamando una definizione materiale del concetto astratto di numero naturale, mentre Peano dà una definizione formale di questo concetto. In che cosa consiste questa differenza? Molto schematicamente in questo: Dedekind dice: «un sistema di numeri naturali è un insieme in cui è presente un certo ente (che noi chiameremo lo zero) e su cui è data una certa operazione (che chiameremo l'operazione di passaggio al successivo), in modo tale che questo insieme, questa operazione e questo ente godono di questa e quest'altra proprietà». Peano invece in sostanza dice: «un sistema di numeri naturali è un insieme con dentro un certo ente e con sopra una